

Publiceringsår 2016

Senare matematik i gymnasie- skolan (matematik 3c)



Innehållsförteckning

Förord	4
Sammanfattning	5
Skolinspektionens samlade bedömning.....	6
Inledning	7
Bakgrund	7
Problembilden	7
Granskningens fokus.....	8
Kvalitetsgranskningens resultat	10
Tillräcklig konkretisering av de nationella målen saknas på många granskade skolor	10
Begränsade möjligheter att arbeta med problemlösning men goda möjligheter att utveckla begreppsförståelse	12
Viktigt att eleverna får föra resonemang, diskutera och reflektera över matematiken	14
Lärarnas anpassning av undervisningen till varje elev	16
Avslutande diskussion	18
Rektorn och lärarnas ansvar	19
Huvudmannens ansvar	20
Bakgrund, syfte och frågeställningar	22
Metod och genomförande	23
Referenser	24
Bilagor	25
Referenspersoner	25
Skolor och huvudmän som ingått i granskningen	26
Kunskapsöversikt för kvalitetsgranskning av undervisning i matematik i gymnasieskolan	28

Förord

Skolinspektionen har i uppdrag att granska kvaliteten i sådan utbildning och pedagogisk verksamhet som står under myndighetens tillsyn. Granskningen innebär en detaljerad och systematisk undersökning av verksamhetens kvalitet inom ett avgränsat område, i förhållande till nationella mål och riktlinjer. Utgångspunkten är alla barns och elevers lika rätt till en god utbildning i en trygg miljö.

Huvudsyftet med kvalitetsgranskningen är att bidra till utveckling. Skolinspektionens iakttagelser, analyser och bedömningar redovisas dels i form av enskilda beslut till de granskade skolorna och skolhuvudmännen, dels i denna övergripande och sammanfattande rapport. Genom beskrivningar av viktiga kvalitetsaspekter och utvecklingsområden inom granskningsområdet, avser rapporten att ge ett utvecklingsstöd även för skolor som inte har granskats. Iakttagelserna och slutsatserna avser dock inte att ge en nationell bild av förhållandena.

Rapporten redovisar resultatet av Skolinspektionens kvalitetsgranskning av undervisningen i matematik kurs 3c i gymnasieskolan. Syftet med granskningen har varit att undersöka om undervisningen i denna senare matematikkurs ger eleverna förutsättningar att utveckla sin begrepps- och problemlösningsförmåga. 29 huvudmän och 33 skolor har omfattats av granskningen.

Helén Ängmo
Generaldirektör

Elisabeth Wikén
Avdelningschef

Sammanfattning

Olika utvärderingar har visat att de studenter som påbörjar olika utbildningar vid universitet och högskolor har bristande förkunskaper i matematik.¹ Internationella kunskapsmätningar har också visat att eleverna i gymnasieskolan har svaga kunskaper i de senare matematikkurserna.² De elever som går vidare till universitets- och högskoleutbildningar där matematik är ett viktigt inslag kan ibland också få svårigheter med att tillgodogöra sig sin utbildning och i värsta fall tvingas avbryta sina studier. Matematiska kunskaper är viktiga i många yrken. Mot denna bakgrund har Skolinspektionen granskat undervisningens kvalitet i matematik kurs 3c i gymnasieskolan.

Matematik kurs 3c är en kurs på senare nivå i gymnasieskolan där eleverna ska ges förutsättningar att utveckla ett antal förmågor som exempelvis att formulera, analysera och lösa matematiska problem samt värdera valda strategier, metoder och resultat. Kursen är obligatorisk endast för naturvetenskaps- och teknikprogrammet. Syftet med granskningen har varit att ta reda på om undervisningen utformas så att eleverna får möjlighet att utveckla sin begrepps- och problemlösningsförmåga. Granskningen har omfattat 33 skolor; 21 kommunala och 12 fristående skolor. Granskningen bygger på intervjuer med cirka 170 lärare, rektorer och elever, observationer av 65 lektioner samt en enkät som besvarades av drygt 1 000 elever.

Skolinspektionen har identifierat utvecklingsbehov på drygt åtta av tio granskade skolor. Samtidigt har Skolinspektionen sett matematikundervisning där eleverna ges goda förutsättningar att utveckla begrepps- och problemlösningsförmågor. I dessa fall är det tydligt för eleverna vad de ska lära sig, undervisningen är anpassad till elevernas behov av stöd och utmaningar och den präglas av diskussioner och reflektioner kring matematiken

Resultatet av granskningen kan sammanfattas i följande punkter:

- I en tredjedel av de skolor som granskats behöver undervisningen utvecklas för att eleverna ska ges goda möjligheter att utveckla förmågan att lösa matematiska problem. På dessa skolor uppger både elever och lärare att de inte arbetar särskilt ofta med problemlösning på lektionerna. Granskningen visar också att flertalet lärare på dessa skolor inte pratar med eleverna om strategier för matematisk problemlösning eller olika sätt att lösa uppgifter. På vissa skolor uppfattas problemlösningsuppgifter som "*någonting extra*" som man arbetar med om man hinner eller om man satsar på att få ett högre betyg.
- De uppgifter eleverna möter när de ska arbeta med problemlösning lever inte alltid upp till styrdokumentens definition av ett matematiskt problem. Granskningen visar att de uppgifter eleverna arbetar med ofta återfinns i ett sammanhang där en möjlig lösningsmetod finns tillgänglig, vilket gör att eleverna snarare imiterar en modell istället för att utforska en lösning. Detta gäller särskilt för skolor som behöver arbeta mer med problemlösning.
- När det gäller undervisningen kring matematiska begrepp visar granskningen att lärarna överlag tar upp och förklarar begrepp. Gemensamma diskussioner och reflektioner om begreppens innebörd i ett vidare sammanhang förekommer dock mer sällan.
- Granskningen visar att det på hälften av de granskade skolorna sällan förekommer diskussioner och reflektion i undervisningen. Flera lärare uttrycker att de inte planerar för diskussion utan tar tag i elevernas frågor när de kommer. I de enstaka fall lärarna organiserar eleverna i grupper med syfte att diskutera (prata matematik) är de själva inte särskilt aktiva i diskussionen.

¹ Högskoleverket (2009) Förkunskaper och krav i högre utbildning, Rapport 2009:16, Stockholm: Högskoleverket. Brandell, L. (2013) Matematikkunskaperna 2013 hos nybörjarna på civilingenjörsprogrammen och andra program vid KTH: Bearbetning av ett förkunskapstest, Stockholm: Kungliga Tekniska Högskolan.

² Skolverket (2010) Svenska elevers kunskaper i TIMSS Advanced 2008 och 1995: En djupanalys av hur eleverna i gymnasieskolan förstår centrala begrepp inom matematiken, Analysrapport till 336, Stockholm: Fritzes.

- Två av tre granskade skolor behöver utveckla arbetet med att konkretisera de nationella målen och de förmågor som eleverna ska läras sig kontinuerligt under kursens gång. Många elever på dessa skolor har inte klart för sig vilka kunskaper och förmågor i matematik det ska finnas möjlighet för dem att utveckla.
- I drygt en tredjedel av de granskade skolorna behöver lärarna i högre grad anpassa undervisningen till varje elev. På dessa skolor är det vanligt att undervisningen i huvudsak läggs på en "medelnivå" för att passa så många elever som möjligt. De insatser och forum som erbjuds är ofta frivilliga att delta i och möter inte alltid de behov som respektive elev har.

Skolinspektionens samlade bedömning

Skolinspektionen konstaterar att undervisningen i senare matematik till viss del har liknade problem som Skolinspektionen konstaterat för matematikundervisningen i grundskolan och övriga kurser i matematik på gymnasieskolan. Tidigare studier och granskningar har visat att matematik traditionellt är ett "tyst ämne" med mycket eget arbete i läroboken efter att läraren har gjort en genomgång. Bilden bekräftas i denna granskning hos de skolor där ett utvecklingsbehov identifierats. En sådan undervisning riskerar att inte ge eleverna tillräckliga möjligheter att resonera om matematiska problem och lära sig att se samband mellan begrepp. Dagens undervisningskultur i matematik har en förhållandevis lång tradition och har präglat både elever och lärare, vilket troligen gör att ett långsiktigt och systematiskt arbete krävs för att åstadkomma förändringar av undervisningen.

Det finns vidare i denna granskning iakttagelser som visar problem med att undervisningen inte alltid utmanar eleverna på rätt nivå. Undervisningen behöver ge stöd för att utforska matematiska problem och stimulera abstrakt tänkande. Skolinspektionen kan konstatera att det, med några undantag, inte saknats fortbildningsinsatser för lärarna i de granskade skolorna. Majoriteten av lärarna i granskningen hade deltagit i den statliga fortbildningsinsatsen Matematiklyftet. Utvecklingsarbetet måste dock fortsätta efter en kompetensutvecklingsinsats. Här pekar forskningen på att det krävs tid och uthållighet för att åstadkomma en kulturändring i undervisningen. Rektorn behöver se till att det finns en organisation för utvecklingsarbetet och hålla fokus på utvecklingen bland annat genom en tydlig uppföljning. Det krävs ett samarbete och ett kollegialt lärande mellan de lärare som undervisar i matematik, både för att diskutera vad som är god undervisning och hur den kan utformas i praktiken. På flera av de granskade skolorna har vi sett utmärkt undervisning i det ena klassrummet och undervisning som behöver utvecklas i det andra. Rektorns ansvar för att utveckla verksamheten och skapa förutsättningar för samarbeten mellan lärare är således central.

Huvudmannen har i sin tur ansvar för att följa upp utvecklingsarbetet så att undervisningen sker mot de nationella målen men även för att se till att det finns förutsättningar för arbetet. Det kan exempelvis handla om se över resurser och kursens timplan. Ett antal lärare i granskningen uttrycker att de tycker det är svårt att hinna med att ge eleverna möjlighet att utveckla alla förmågor som anges i ämnesplanen. Kursen kan ibland behöva vara längre om exempelvis eleverna har för dåliga förkunskaper, något som forskningen visat är relativt vanligt. Upplevd tidsbrist kan dock också bero på hur läraren planerat och utformat undervisningen. Vad den upplevda tidsbristen beror på behöver dock huvudmannen ta reda på för att kunna avgöra om rätt förutsättningar ges.

Inledning

Bakgrund

Det är mycket viktigt att grund- och gymnasieskolan rustar eleverna med goda kunskaper i matematik, eftersom matematiska kunskaper är centrala i många högskoleutbildningar och yrken. Undersökningar tyder dock på eleverna lämnar gymnasieskolan med bristfälliga kunskaper, vilket sedan ibland leder till studieproblem och i värsta fall till att de tvingas avbryta sina högskolestudier. Svaga förkunskaper i matematik hos studenter nämns i de flesta av dåvarande Högskoleverkets utvärderingar av ämnen och yrkesutbildningar inom områdena teknik, naturvetenskap och vård, men även i själva matematikutbildningen och samhällsvetenskapliga utbildningar.³ Kungliga tekniska högskolan (KTH) rapporterar om en kraftig nedgång sedan millennieskiftet i nybörjarstudenternas matematikkunskaper.⁴ Även forskning och utvärdering pekar på att det finns problem i gymnasieskolan när det gäller elevernas matematikkunskaper och undervisningen i de högre matematikkurserna. I den internationella utvärderingen TIMSS Advanced 2008, som undersöker elevers kunskaper i avancerad matematik och fysik i gymnasieskolans sista år, låg den genomsnittliga provpoängen för de deltagande svenska eleverna under det internationella genomsnittet. Svenska resultat har också försämrats jämfört med 1995 års undersökning.

Skolinspektionen har sedan tidigare genomfört två kvalitetsgranskningar av skolans matematikundervisning. Den första genomfördes 2008–2009 och berörde grundskolans matematikundervisning i 23 grundskolor med inriktning på årskurserna 3, 6 och 9. Den andra kvalitetsgranskningen i ämnet matematik genomfördes år 2009–2010 och då granskades kursen Matematik A vid 55 gymnasieskolor. Den senare matematikundervisningen på gymnasieskolan har dock inte tidigare varit föremål för granskning av Skolinspektionen. Mot bakgrund av detta och problemet att många elever som lämnar gymnasieskolan har bristande kunskaper i matematik när de kommer till högskolan finner Skolinspektionen det angeläget att granska undervisningen i en senare kurs matematik på gymnasiet.

Problembilden

Syftet med utbildningen i ämnet matematik i gymnasieskolan är, enligt läroplanen⁵, att eleverna utvecklar sin förmåga att arbeta matematiskt, vilket bland annat innebär att utveckla förståelse av matematiska begrepp och metoder samt att utveckla olika strategier för att kunna lösa matematiska problem. Studier visar dock att elever, både i grund- och gymnasieskolan, inte får tillräckliga möjligheter att utveckla dessa matematiska förmågor. Eleverna har till exempel endast begränsade möjligheter att utveckla sin problemlösningsförmåga och sin förmåga att se samband mellan olika matematiska begrepp.⁶ I en studie genomförd av forskare från Nationellt centrum för matematikutbildning vid Göteborgs universitet och Umeå forskningscentrum för matematikdidaktik vid Umeå universitet konstateras att den kompetens eleverna främst får utveckla är hantering av procedurer för att lösa relativt kända uppgifter och att eleverna inte ges möjligheter att utveckla övriga kompetenser i ämnet. Detta

³ Högskoleverket (2009)

⁴ Brandell (2013)

⁵ Skolverket (2011a) Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola 2011, Stockholm: Fritzes.

⁶ Bergqvist, E. m.fl. (2010) Matematikutbildningens mål och undervisningens ändamålsenlighet: Gymnasieskolan hösten 2009, Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs universitet. Skolinspektionen (2009) Undervisningen i matematik – utbildningens innehåll och ändamålsenlighet, Rapport 2009:5, Stockholm: Skolinspektionen. Skolinspektionen (2010) Undervisningen i matematik i gymnasieskolan, Rapport 2010:13, Stockholm: Skolinspektionen.

tar sig uttryck i att eleverna under en stor del av matematiklektionerna individuellt räknar uppgifter i läroböckerna – uppgifter som främst är av procedurell karaktär.⁷

Även Skolverket bekräftar denna bild.⁸ De menar att en orsak till de låga resultaten i de internationella studierna är en alltför snäv inriktning på procedurer i matematikundervisning: I en sådan undervisning fokuseras på beräkningar utan begreppslig förankring. Eleverna lär sig hur en viss typ av uppgifter ska lösas genom att utföra att vissa steg i beräkningen, men förstår inte de grundläggande begrepp proceduren är kopplad till. Om inte sådana matematiska begrepp också lärs in kommer eleven att lära sig isolerade detaljer utan inbördes sammanhang. Eleven kan då inte heller tillämpa proceduren i andra sammanhang än det inövade för att självständigt lösa matematiska problem.

Nära kopplat till den starka fokuseringen på enskilt räknearbete är att många elever inte upplever matematikundervisningen som utmanande och stimulerande. Eleverna i gymnasieskolan har också med sig alltför begränsade förkunskaper i matematik från grundskolan, vilket ställer krav på stöd och handledning för att de ska kunna utveckla sin begrepps- och problemlösningsförmåga.

Granskningens fokus

Matematik kurs 3c är den första av matematikkurserna på gymnasiet som enligt ämnesplanen behandlar *fördjupade* kunskaper i ämnet. Den är obligatorisk endast för elever på naturvetenskaps- och teknikprogrammen. Kvalitetsgranskningen omfattar undervisning i kurs 3c vid 33 skolor i landet, där besök gjorts framför allt under våren 2015. Granskningen har fokuserat på elevernas möjlighet att i undervisningen utveckla *begreppsförmågan* och *problemlösningsförmågan* då matematiska begrepp och förståelsen av dessa är ett nödvändigt verktyg för att kunna analysera och lösa matematiska problem. Huvudfrågeställningen är formulerad enligt följande; innehåller undervisningen moment och uppgifter samt är utformad så att elevernas problemlösnings- och begreppsförmåga utvecklas? Viktiga aspekter som vi då granskar är om läraren konkretiserar och förklarar de nationella målen om problemlösning och begreppsförståelse, om eleverna får möta och arbeta med matematiska problem och begrepp i undervisningen samt föra resonemang, diskutera och reflektera. En annan viktig aspekt som granskas är om undervisningen anpassas till elevernas behov, så att eleverna får såväl stöd som stimulans och utmaningar.

En matematikuppgift definieras som ett *matematiskt problem* om det inte finns en uppenbar lösningsmetod som är känd för personen som möter uppgiften.⁹ För att lösa problemet krävs att tidigare kunskaper, om begrepp, procedurer och metoder med mera, måste användas på nya sätt och i obekanta situationer. Eleven måste med andra ord själv konstruera hela eller väsentliga delar av lösningsmetoden för att kunna lösa problemet. På så vis skiljer sig problemlösning från räkneprocuderer, eftersom problemlösning inte kan förenklas till en rutin med klart uttalade steg. Vidare kan elevers möjligheter till så kallade metakognitiva reflektioner vara ett stöd i utvecklingen av deras problemlösningsförmåga. Det handlar om situationer där eleverna får tänka högt, söka alternativa lösningar, diskutera och värdera lösningar, strategier, et cetera.¹⁰

⁷ Bergqvist, E. m.fl. (2010)

⁸ Skolverket (2010) *Svenska elevers kunskaper i TIMSS Advanced 2008 och 1995: En djupanalys av hur eleverna i gymnasieskolan förstår centrala begrepp inom matematiken*, Analysrapport till 336 2009, Stockholm: Fritzes.

⁹ Skolverket (2011 a)

¹⁰ Skolverket (2011b) Matematik, Ämnesplan, <http://www.skolverket.se/laroplaner-amnen-och-kurser/gymnasieutbildning>

Begreppsförmåga handlar om att kunna beskriva, analysera och använda centrala matematiska begrepp. Det innebär att eleven ska utveckla förmågan att beskriva innebörden av ett begrepp och samband mellan begrepp. Detta innefattar att kunna redogöra för definitioner, egenskaper och relationer hos begrepp och samband mellan dessa.¹¹ Ett matematiskt begrepp kan vara ett matematiskt *objekt*, som till exempel cirkel, en *process*, som till exempel subtraktion, eller en *egenskap*, som till exempel omkrets. För att beskriva ett begrepp måste det gestaltas i någon form av representation. Varje matematiskt begrepp anknyter till andra begrepp. Exempelvis finns det en relation mellan begreppet cirkel och begreppet omkrets: varje cirkel har en omkrets. Begreppsförståelse är inte bara en fråga om att känna till och kunna använda enskilda matematiska begrepp, utan handlar också om att förstå den roll som begrepp spelar i matematiken i allmänhet – att olika begrepp står i relation till varandra, att begrepp kan specialiseras eller generaliseras och att många matematiska begrepp uppkommer som abstraktioner eller formaliseringar av intuitiva vardagliga fenomen.¹²

Vid sidan av de två ovan beskrivna förmågorna uttrycks i aktuell ämnesplan¹³ fem andra matematiska förmågor som undervisningen i matematik ska ge eleverna möjlighet att utveckla; procedurhanteringsförmågan, modelleringsförmågan, kommunikationsförmågan, resonemangsförmågan och relevansförmågan. Den här granskningen har fokuserat på om eleverna i matematik kurs 3c får möjlighet att utveckla begrepps- och problemlösningsförmåga.

¹¹ Skolverket (2011b)

¹² (NCM, <http://ncm.gu.se/2> hämtad 2015-09-30).

¹³ Skolverket 2011b

Kvalitetsgranskningens resultat

I detta avsnitt presenteras Skolinspektionens bedömning av hur granskade skolors undervisning i matematik kurs 3c motsvarar de krav läroplanen ställer avseende att utveckla elevernas begrepps- och problemlösningsförmåga. I undervisningen ska eleverna få möta och arbeta med begrepp och problem samt diskutera och reflektera kring den matematik de arbetar med. Vidare ska undervisningen anpassas till elevernas behov, så att eleverna får såväl stöd som stimulans och utmaningar. Läraren behöver också konkretisera och förklara de nationella målen om problemlösning och begreppsförståelse.

I granskningen har Skolinspektionen sett exempel på undervisning som ger eleverna goda förutsättningar att utveckla begrepps- och problemlösningsförmågor. Det innebär att Skolinspektionen bland annat har sett matematikundervisning där det är tydligt för eleverna vad de ska lära sig, undervisning som är anpassad till elevernas behov av stöd och utmaningar, undervisning som präglas av diskussion och reflektion kring matematiken och undervisning som i övrigt ger eleverna goda förutsättningar att utveckla exempelvis begrepps- och problemlösningsförmågan. Samtidigt har Skolinspektionen identifierat utvecklingsbehov på drygt åtta av tio granskade skolor. Behovet av utveckling varierar dock både mellan olika skolor och inom en och samma skola.

Tillräcklig konkretisering av de nationella målen saknas på många granskade skolor

En av kvalitetsgranskningens frågeställningar handlar om huruvida lärarna konkretiserar och förklarar de nationella målen om problemlösnings- och begreppsförståelse. I skollagen och gymnasieförordningen framgår att skolan ska klargöra utbildningens mål och innehåll för eleverna. Undervisning som tydligt pekar ut riktning för lärandet genom målrelatering, struktur och förankring i aktuella styrdokument, är också något som enligt en forskningsöversikt¹⁴ har betydelse för elevernas resultat. Enligt denna behöver läraren kontinuerligt ange målen för lärandet och syften med de olika aktiviteterna.

Granskningen visar att arbetet med att konkretisera och förklara de nationella målen i undervisningen behöver förbättras vid två tredjedelar av de granskade skolorna. Vid dessa skolor kan flera av de intervjuade eleverna inte ge en klar bild av målen och vilka de matematiska förmågorna är, och om de känner till dem så är de osäkra på vad de innebär och i vilka sammanhang de kan användas. Exempelvis säger en intervjuad elevgrupp att de inte vet vad som är viktigt för att klara kursen och de tycker själva att de behöver *”utveckla allt”* inom matematiken. Bilden bekräftas till viss del av den elevenkät som genomfördes i granskningen. Där anser var femte elev att det stämmer ganska eller mycket dåligt att läraren talar om vilken kunskap som eleven behöver utveckla för att nå målen. Var fjärde elev ansåg dessutom att det stämmer ganska eller mycket dåligt att läraren regelbundet påminner om vilka målen med matematikundervisningen är.

Fokus på vad som ska göras på bekostnad av syfte och mål

Det som skiljer undervisningen i skolor med respektive utan utvecklingsbehov är dels i vilken omfattning lärarna konkretiserar och förklarar målen, dels i vilken utsträckning de återkommer till målen under kursens gång. I princip samtliga lärare, även i de granskade skolorna med utvecklingsbehov, tar på något sätt upp de nationella målen. Endast i undantagsfall finns det lärare som inte alls prioriterar att

¹⁴ Håkansson, J. och Sundberg, D. (2012) Utmärkt undervisning: Framgångsfaktorer i svensk och internationell belysning, Stockholm: Natur och Kultur.

förklara och konkretisera de nationella målen om de matematiska förmågorna utan nöjer sig med att bara dela ut ett papper eller hänvisa till skolans lärplattform.

Vid de flesta skolor med utvecklingsbehov går lärarna igenom de nationella målen om problemlösning och begreppsförmåga på ett alltför otydligt sätt och ibland endast i början av kursen. Fokus ligger i dessa skolor mer på vad som ska göras, exempelvis vilka tal som ska räknas under lektionen, än vad som är syfte och mål med olika uppgifter. Förtydliganden och konkretiseringar görs ibland men verkar relativt ofta inte vara inplanerade moment. Ibland är det när elever ifrågasätter nyttan som konkretiseringar görs. Dock återkommer flera av lärarna i dessa skolor till de nationella målen i samband med prov, vilket dock kan vara i det senaste laget för eleverna.

Flera elever på de skolor som har utvecklingsbehov efterfrågar konkretiseringar. En elev säger "det är svårt för mig när jag inte vet varför och när jag ska använda det här. Då är det lättare om läraren säger att den ska användas för att räkna ut vinkeln av en bro". En annan elev säger "det är roligare att arbeta med ett problem när man vet vad man ska använda det till" och ytterligare en elev säger att det vore bra om undervisningen var mer kopplad till "verkligheten". Samtidigt säger de att de nationella målen och förmågorna är svåra att förstå i den form som de står i styrdokumentet. De intervjuade eleverna på en skola säger att ämnesplanen är "så luddigt skriven, så om läraren ska gå igenom den måste det ta mycket tid för att vi ska förstå den". Denna bild bekräftas av en lärare som förändrat sin undervisning kring de nationella målen. Läraren berättar att hen brukade dela ut de nationella målen i början på kursen, men märkte att det inte gav eleverna något.

Vissa lärare på dessa skolor bedömer att målen är för abstrakta för att eleverna ska kunna förstå dem. En intervjuad lärare säger att det är svårt att få eleverna intresserade av nationella mål och att eleverna inte alltid uppfattar det som relevant för dem. Flera lärare i skolor som behöver utveckla undervisningen med att förklara och konkretisera målen uppger också att de tycker detta är svårt och att de saknar "verktyg" för detta.

Målen hålls levande under kursens gång vid framgångsrika skolor

De intervjuade eleverna vid de skolor vars lärare konkretiserar och förklarar målen uppger att de känner till målen och de matematiska förmågorna, förstår vad de innebär och vilken nytta man kan ha av dem exempelvis i framtida yrken eller vardagslivet. Eleverna kan också under intervjuerna ge förklaringar och definitioner på de olika förmågorna.

Lärarna i dessa skolor återkommer till de nationella målen under kursens gång och håller dem på så vis levande för eleverna. Exempelvis tar de upp dem i samband med lektionsstart eller något nytt moment, vid genomgångar och när de summerar vad som gjorts. Exempelvis skriver en lärare in i elevdokumentationssystemet vilka förmågor som eleven arbetat med. De flesta lärarna i dessa skolor har också en planering som delges eleverna, där det framgår vilka mål och förmågor som ska tränas och inte bara vilka uppgifter som ska göras. Även återkoppling till eleven relateras oftast till de nationella målen och förmågorna eleverna ska utveckla. Exempelvis vid återkoppling av provresultats framgår vilka förmågor som tränats i olika övningar och vilka förmågor som eleven behöver utveckla. En lärare berättar att "*varje poäng kopplar jag till förmågor precis som man gör på de nationella provet. Det är också ett sätt att försöka få eleverna att vara mer engagerade i bedömning av förmågorna*". Det finns också lärare som synliggör för eleverna hur de utvecklas avseende de matematiska förmågorna, exempelvis med hjälp av bedömningsmatriser.

Ett sätt som används för att konkretisera de nationella målen är att visa på hur begrepps- och problemlösningsförmågan kan komma till användning inom olika yrken, i samhällslivet i övrigt samt hur matematiska begrepp kan kopplas till andra ämnen i skolan. Här kan både elever och lärare ge rikligt

med exempel. Vanligast är att det görs kopplingar till ämnet fysik. En orsak till detta är att flera av lärarna i de granskade skolorna också undervisar i detta ämne. Kopplingar görs också till andra ämnen såsom teknik, kemi, biologi och dataprogrammering.

I granskningen har vi fått flera exempel på att elever får lära sig hur Pytagoras sats kan användas för att göra beräkningar vid byggnationer, som exempelvis lådor och trätrasser. I en skola fick eleverna göra en prognos över antal förskolor som behövs i en kommun och där eleverna genom derivata fick beräkna maximal vinst för respektive skola. I denna skola gjordes även en koppling till matematik i ett historiskt perspektiv genom att eleverna fick använda logaritmtabeller istället för miniräknare. Läraren berättar att hen *”märkt att de hade svårt med logaritmer och ville hitta ett problem som även kunde vara roligt”*.

Begränsade möjligheter att arbeta med problemlösning men goda möjligheter att utveckla begreppsförståelse

En central frågeställning i kvalitetsgranskningen är om eleverna får möta och arbeta med matematiska problem (problemlösningsförmåga) och begrepp (begreppsförmåga) i undervisningen. Dessa förmågor är tätt sammanflätade. Ett matematiskt problem handlar om och kan relateras till vissa begrepp, och för att kunna analysera och lösa problemet krävs en förståelse av dessa begrepp. I läroplanen framgår att eleverna ska utveckla förståelse av matematiska begrepp och metoder samt utveckla olika strategier för att kunna lösa matematiska problem. Undervisningen ska ge eleverna förutsättning att kunna formulera, analysera, tolka och lösa problem, vilket inkluderar ett medvetet användande av problemlösningstrategier som att exempelvis förenkla problemet, genomföra lämpliga beteckningar, ändra förutsättningar, värdera resultat, etc.

Begränsade möjligheter att arbeta med problemlösning

I en tredjedel av skolorna som vi granskat kan Skolinspektionen konstatera att undervisningen behöver utvecklas så att eleverna i större utsträckning och med ökat stöd får arbeta med matematiska problem i undervisningen. Vid dessa skolor uppger både elever och lärare att de inte så ofta jobbar med problemlösning på lektionerna. Lärarna tycker visserligen att problemlösning är viktigt att lära sig men uppger att det får stryka på foten eftersom de anser att tiden inte räcker till.

Granskningen visar också att flertalet lärare på dessa skolor inte pratar med eleverna om strategier för matematisk problemlösning. Enligt eleverna har deras lärare inte i någon större utsträckning diskuterat med dem vad matematisk problemlösning handlar om; hur man ska tänka och hur man kan angripa ett problem. Det gör att ganska många elever på dessa skolor har en vag uppfattning om vad problemlösning är. Exempelvis berättar en elev att det i boken finns *”uppgifter som liknar problemlösning, typ frågor i text”*.

Av dessa intervjuer framgår också att lärare och elever inte så ofta diskuterar olika sätt att lösa uppgifter på, även om eleverna är medvetna om att det finns olika lösningar. Vissa lärare tenderar att ge eleverna svaret på uppgifter och frågor istället för att vägleda dem genom att ställa frågor som hjälper eleverna att själva hitta lösningen. Lektionerna på dessa skolor tenderar att vara en envägskommunikation, där läraren pratar och eleven lyssnar på beskrivningarna. Lärarna bjuder sällan in till diskussioner där eleverna exempelvis får beskriva hur de löst en uppgift. Ett vanligt upplägg av ett arbetspass på dessa skolor är att läraren gör en genomgång följt av att eleverna får arbeta enskilt eller ibland två och två medan läraren går runt och försöker svara på så många frågor som möjligt.

Osäkert om problem är matematiska problem

Granskningen visar även att elever, när de ska arbeta med problemlösning, inte alltid möter och arbetar med matematiska problem så som de definieras i styrdokumentet. För att en matematisk uppgift, enligt styrdokumentet, ska kunna definieras som ett matematiskt *problem* får det inte finnas en uppenbar lösningsmetod som är känd för den som ska lösa uppgiften.

Vid intervjuer med elever och lärare uppger de flesta i de skolor som bedömts ha ett utvecklingsbehov att elever får möta och arbeta med matematiska problem även om det inte är så ofta som man skulle önskat. Granskningen visar dock att de uppgifter eleverna arbetar med ofta återfinns i ett sammanhang där en möjlig lösningsmetod finns tillgänglig. Det innebär att behovet av att söka alternativa lösningar, diskutera och värdera lösningar, strategier et cetera för att lösa problemet är begränsat. Eleverna utmanas inte att använda tidigare kunskaper – som begrepp, procedurer och metoder – på nya sätt. Det är vanligt förekommande att läroboken används på ett sådant sätt att läraren presenterar ett område eller kapitel i taget och att eleverna sedan arbetar med de uppgifter som hör till respektive område. I några läroböcker finns i slutet av de olika avsnitten uppgifter som benämns *problemlösningssuppgifter*. De uppgifterna fungerar i huvudsak som en tillämpning av de uppgifter som behandlas i respektive kapitel, vilket gör att elevernas möjligheter att arbeta med uppgifter där förutsättningarna är helt eller delvis obekanta är begränsade. Eleverna får således inte chans att utveckla olika strategier för att lösa matematiska problem, vilket är centralt för undervisningen enligt matematik kurs 3c.

På en skola berättar eleverna att de nästan alltid vet vilka procedurer de ska använda för att lösa uppgifterna *"eftersom de följer kapitlen i boken"*: Eleverna vid en annan skola uttrycker sig på följande vis; *"problemlösning är en tillämpning av det man just övat i kapitlet, därför blir problemlösning i boken inte en överraskning"*. Vid ytterligare en skola berättar eleverna att de får olika uppgifter av sin lärare; uppgifter som ska ge dem möjlighet att arbeta med problemlösning. Eleverna berättar att de kan föreslå olika lösningar på uppgifterna, men då uppgifterna oftast är kopplade till ett visst område i boken så menar eleverna att det är lättast att använda den metod som finns i boken.

Granskningen visar också att relativt många elever har uppfattat de problemlösningssuppgifter som finns i boken som *"någonting extra"*; uppgifter man arbetar med om man hinner eller om man satsar på att få ett högre betyg. Från lärarhåll uppges att tiden inte riktigt räcker till och att många elever behöver träna procedurräkning för att klara kursen. I en skola uppger eleverna att de endast vid ett fåtal tillfällen har arbetat med problemlösning. Vid dessa tillfällen har de inte arbetat *"seriöst"* med problemen då eleverna inte har upplevt att uppgifterna har varit kopplade till bedömning och betygsättning.

Problemlösningssförmågan kan utvecklas genom undersökande aktiviteter

Skolor som på ett tydligt sätt arbetar för att eleverna ska få möjlighet att utveckla sin problemlösningssförmåga har problemlösning som en frekvent återkommande aktivitet. Lärarna på dessa skolor ser också till att komplettera med andra problemlösningssuppgifter när de ser att materialet i läroböckerna inte räcker till. Lärarna visar på strategier för hur man löser och diskuterar olika sätt att lösa matematiska uppgifter på med eleverna. Genom att ställa frågor försöker lärarna lotsa eleverna vidare att hitta lösningen. De använder också diskussioner och undersökande aktiviteter för att skapa förutsättningar för arbetssätt som på olika sätt främjar elevernas problemlösningssförmåga. En sådan aktivitet kan exempelvis vara att tillverka lådor i olika storlekar och räkna ut vilken volym de har. Flera lärare uppger att eleverna återkommande har grupparbete kring problemlösningssuppgifter. De får sedan redovisa för varandra hur de har löst uppgiften.

Matematiska begrepp förklaras men diskuteras i för liten utsträckning

De allra flesta elevgrupper anser att deras lärare på ett bra sätt går igenom och förklarar de matematiska begrepp som ingår i kursen. Många av de intervjuade elevgrupperna uppger också att de får möjlighet att förstå hur de olika begreppen relaterar till varandra, genom att läraren bland annat i genomgångar beskriver relationer mellan olika begrepp. Vid några skolor är det extra tydligt, vilket framgår både vid observationer och i intervjuer med lärare och elever, att lärarna på ett professionellt och pedagogiskt sätt förklarar begreppens innebörd och tydliggör samband mellan begrepp samt följer upp att eleverna förstår. Exempelvis kan läraren illustrera innebörd och samband genom att koppla till elevernas kunskaper om begrepp som använts i tidigare kurser.

Det de flesta elever betonar när vi ställer frågor om det sker diskussioner kring matematiska begrepp är dock att det är läraren som förklarar och beskriver och eleverna som lyssnar och *”tar in”*. Det är sällan som eleverna får möjlighet att reflektera genom gemensamma diskussioner.

Vid de observationer som genomförts i granskningen skedde inte några diskussioner kring vad de olika begreppen står för och hur de fungerar. Några av elevgrupperna uttrycker i intervju att läraren inte brukar gå igenom hur de matematiska begreppen relaterar till varandra. En del av eleverna menar dock att man lär sig det efterhand, att det *”kommer automatiskt”*, medan majoriteten av dessa elever uttrycker att de skulle behöva tydligare förklaringar och mer diskussioner kring vad de matematiska begreppen innebär och hur de hänger ihop för att de ska förstå och kunna använda dem. Ett fåtal elever säger att de aldrig diskuterar begrepp på lektionerna; *”för det hinner vi inte med”*.

Vi uppfattar att det finns en avsaknad av samtal och diskussion när det gäller elevernas möjlighet att förstå innebörden av olika begrepp och hur de sinsemellan hänger ihop. Lärarna går visserligen igenom och förklarar begreppen men deras innebörd är sällan föremål för någon diskussion där eleverna kan prova sina antaganden eller ställa frågor kring hur begreppen fungerar och hänger samman. Flera lärare – och även elever, hänvisar till läroboken. I boken finns begreppen förklarade och eleverna hänvisas ofta dit. Vissa lärare upprättar också *”gloslistor”* som eleverna kan konsultera när de behöver påminna sig vad ett begrepp betyder.

Viktigt att eleverna får föra resonemang, diskutera och reflektera över matematiken

En frågeställning som kvalitetsgranskningen har haft avsikt att besvara är om eleverna i matematik kurs 3 c får föra resonemang, reflektera och diskutera kring den matematik de arbetar med. I ämnesplanen framgår att undervisningen i ämnet matematik bland annat ska ge eleverna förutsättningar att utveckla förmåga att; följa, föra och bedöma matematiska resonemang och att; kommunicera matematiska tankegångar muntligt, skriftligt och i handling. En studie av Skolverket har visat att ett gott socialt klimat mellan lärare och elev och gemensamma reflektion och samtal kring olika sätt att tänka kring och lösa matematiska problem utvecklar elevernas begreppsförståelse och matematiska tänkande.¹⁵ Goda möjligheter till reflektion och diskussion i varierade arbetsformer är alltså viktiga inslag i undervisningen.

¹⁵ Skolverket (2003) *Lusten att lära - med fokus på matematik*, Nationella kvalitetsgranskningar 2001-2002, Skolverkets rapport 221, Stockholm: Fritzes.

I hälften av de granskade skolorna genomförs inte reflektioner och diskussioner kring matematik återkommande och som inplanerade moment

Granskningen visar att det endast är i hälften av de granskade skolorna som man återkommande diskuterar och reflekterar kring den matematik man arbetar med. I den andra hälften av skolorna förekommer diskussioner och reflektioner mer sällan. De diskussioner som förekommer karaktäriseras snarare av att eleverna som sitter närmast varandra på lektionerna hjälper varandra med hur de ska lösa en uppgift. Det kan också förekomma vissa inslag av diskussioner i samband med lärarens genomgång, där läraren kan be någon elev visa sin lösning eller där läraren ställer frågor kring lösningen. I några av dessa skolor har det någon gång också förekommit diskussioner i grupp.

Flera lärare i dessa skolor uttrycker att de inte planerar för diskussion utan tar tag i elevernas frågor när de kommer. Det är inte så att de tycker diskussioner är oviktiga men diskussioner kan ta för mycket tid. Några lärare menar också att det saknas bra läromedel och uppgifter för att föra diskussioner i klasserna. I de fall lärarna någon enstaka gång organiserar eleverna i grupper med syfte att de ska diskutera (prata matematik) är de själva inte så aktiva i diskussionen och följer inte heller alltid upp vad eleverna kommit fram till i sina diskussioner. Vissa lärare hänvisar också till att många elever inte vill tala i helklass inför sina kamrater, även om de flesta elever på de granskade skolorna tycker att man har ett öppet klimat i klassen där det är lätt att ställa frågor.

Vissa elever på dessa skolor bekräftar bilden att man sällan diskuterar och reflekterar tillsammans kring matematiken medan andra elever ändå upplever att de får diskutera och reflektera på lektionerna i och med att de upplever att läraren uppmuntrar diskussioner med närmaste bänkkamrat om man kör fast. När elever och lärare i skolor med utvecklingsbehov svarar på våra följdfrågor uppger de att diskussionerna oftast handlar om att tillsammans försöka komma ihåg vilken metod/procedur man behövde för att lösa uppgiften. De diskussioner som förekommer tenderar alltså i första hand handla om hur man ska *göra* för att exempelvis lösa uppgiften. Diskussionerna riskerar därmed att inte alltid ge eleverna förutsättningar att förstå de underliggande principerna för *vad* de gör och *varför*.

I hälften av de granskade skolorna kretsar diskussionerna inte bara kring hur en uppgift ska lösas utan även kring vad och varför

I de granskade skolorna som inte bedömts ha utvecklingsbehov är reflektion och diskussion inplanerade moment som sker relativt frekvent, oftast i helklass eller i gruppdiskussioner. Här finns flera positiva exempel, i en skola har man exempelvis diskussioner kring matematik en gång i veckan. Läraren har i dessa skolor en aktiv roll i diskussionerna genom att lyssna, ställa frågor och ge återkoppling på elevernas tankar. Läraren kan också gå in och förklara eller problematisera elevernas diskussioner. Flera lärare brukar också avsluta diskussionerna genom att sammanfatta det eleverna kommit fram till i sina diskussioner. I helklass är det oftast läraren som leder diskussionen.

Lärarna i dessa skolor uppger också att de är måna om skapa ett gott klassrumsklimat. Flera säger att man försöker förmedla att *"det gör inget om det blir fel"* och *"inga frågor är dumma frågor"*. Man uppmanar också *"till att fråga enkla saker för att det är så man lär sig"*. En lärare uppger att hen arbetar mycket med normbildning. Hen berättar att *"det är viktigt att göra klart för eleverna att de inte ska visa mig hur duktiga de är på en vanlig lektion. Jag säger till dem att just nu är vi inne i en träningsfas och då kan man ibland ha fel"* och *"om det är träning är det tillåtet att missa målet när man övar straffar"*. Eleverna i dessa skolor bekräftar denna bild och menar att de inte är rädda för att göra fel eller att de kan ställa frågor oavsett nivå eller karaktär på frågan.

En lärare berättar i intervju att hen brukar dela in klassen i mindre grupper för då vågar fler elever prata. Läraren beskriver att hen går runt bland grupperna för att resonera, diskutera och lotsa eleverna genom olika lösningar kring matematiska problem. Hen brukar notera vilka elever som för de

matematiska resonemangen i syfte att senare vid enskilda samtal eller utvecklingssamtal med eleven lotsa denne till vidare till resonemang och analys.

Lärarna i skolorna där diskussioner är frekvent förekommande uppger att diskussionsövningar är till för att ge eleverna möjlighet att föra och följa resonemang, hitta alternativa lösningar samt att tillsammans med läraren i en diskussion reflektera kring den matematik de arbetar med. Man uppger att i dessa diskussioner får eleverna även motivera sitt svar och diskutera varför de gör på ett visst sätt när de löser uppgifter. Man diskuterar även vilka alternativa lösningar som kan finnas. En elev berättar i en intervju att *"när jag kan leda och förklara för någon annan, då vet jag att jag förstått. Lärarna uppmanar oss att prata med varandra"*. En annan elev säger *"Vi diskuterar ofta i grupp. Ibland blir det svårt att förklara. Men om man själv förstår men inte andra gör det, måste man förklara och då lär man sig bättre. Då får man utveckla sina ord och förklara så att kompiserna verkligen förstår. Det blir på så sätt lärorikt för allihop"*. Det faktum att eleverna får möjlighet att formulera vad de gjort (exempelvis hur de löst en uppgift) och *varför* ger dem också en chans till så kallad metakognitiv reflektion som kan bidra till att utveckla förmågan att lösa problem.

Sammantaget kan vi konstatera att alla elever inte får möjlighet till reflektion och gemensam diskussion för en ökad förståelse och helhetsbild av matematiken. Endast i hälften av granskade grupper skapar lärarna, på ett medvetet och professionellt sätt, goda möjligheter till detta.

Lärarnas anpassning av undervisningen till varje elev

En fråga granskningen har syftat till att besvara är om undervisningen i matematik kurs 3c anpassas utifrån elevernas behov så att de får såväl stöd som stimulans och utmaningar.

Skollagen anger att alla elever ska ges den ledning och stimulans som de behöver i sitt lärande och sin personliga utveckling för att de ska kunna utvecklas så långt som möjligt enligt utbildningens mål, utifrån sina egna förutsättningar. Elever som lätt når de kunskapskrav som minst ska uppnås ska ges ledning och stimulans för att kunna nå längre i sin kunskapsutveckling. Vidare framgår det att om det kan befaras att en elev inte kommer att nå de kunskapskrav som minst ska uppnås så ska den eleven skyndsamt ges stöd i form av extra anpassningar inom ramen för den ordinarie undervisningen.

Matematik kurs 3c är en kurs på senare nivå i gymnasieskolan. För att elever som läser matematik kurs 3c ska nå kunskapskraven och få förutsättningar att klara högre studier i matematik är det av stor vikt att undervisningen anpassas till varje elevs behov av stöd, stimulans och utmaningar.

I drygt en tredjedel av de granskade skolorna behöver lärarna i högre grad anpassa undervisningen så att varje elev ges det stöd, den ledning och stimulans som de behöver. Vid dessa skolor är det vanligt att undervisningen inriktas mot en *"medelnivå"* för att passa så många elever som möjligt. Anpassningen till elevernas olika nivåer sker främst genom att eleverna kan arbeta med olika svåra uppgifter i läroboken. En lärare uppger vid intervju att det på denna senare matematiknivå är svårt att hitta enkla uppgifter och att genomgångarna ibland kan ligga på en för hög nivå för vissa elever.

Under lektionerna arbetar eleverna i regel med uppgifter i boken och i den processen hjälper läraren så många elever som hen hinner under lektionens gång. Detta riskerar att leda till att en del elever inte får den hjälp de behöver medan andra elever skulle kunna nå längre i sin kunskapsutveckling med mer utmaningar. En lärare berättar vid intervju att det är svårt att anpassa undervisningen efter samtliga elevers förutsättningar. Läraren försöker *"träffa så många som möjligt"* med nivån på undervisningen, men *"att träffa så många som möjligt innebär att jag måste släppa de elever som är högpresterande"*.

Det är vanligt att läraren anger de uppgifter eleverna behöver genomföra för att de ska ha möjlighet att nå ett visst betygssteg. Eleverna kan ofta helt själva välja vilken betygsnivå de vill *"lägga sig på"*.

Risken med detta arbetssätt är att eleven inte stimuleras att nå så långt som möjligt i sin kunskapsutveckling. En lärare framhäver att fokus främst ligger på att eleverna ska klara kursen, det vill säga nå betyget för godkänt, och för lite tid går åt till att ge stimulerande och utmanande uppgifter till de elever som kan nå ett högre betyg. Detta är en problematik som framskymtar vid flera granskade skolor.

Vid de flesta skolor finns någon form av stödverksamhet i form av så kallade *"mattestugor"* en eller ett par gånger i veckan, till vilken de elever som har behov av mer hjälp kan vända sig. Vid en del skolor finns också en uttalad tanke om att de elever som behöver *"fler utmaningar"* ska kunna använda de resurser som finns vid *"mattestugorna"*. Några lärare uppger att eleverna själva måste ta ansvar för sitt lärande och vid behov ansluta till de forum som erbjuds. Det är dock oklart om deltagande elever ges det stöd eller de utmaningar som de har behov av. Någon uppföljning av elevernas deltagande eller effekterna av de extra lektionerna som erbjuds görs heller inte alltid.

Det är för övrigt ovanligt med utredningar och åtgärdsprogram i de fall elever riskerar att inte uppnå kunskapskraven för kursen, tvärtom är det på några skolor relativt många elever som inte klarar matematikkurserna men går vidare till nästa kurs ändå. Detta innebär att eleverna studerar två matematikkurser under samma period, vilket kan bli en svår utmaning för eleverna utan tillräckligt stöd.

Granskningen visar också att det finns lärare som lyckas i sitt arbete med att anpassa undervisningen till varje elev. Framgångsfaktorn här är att läraren har god kunskap om varje elevs kunskapsnivå och kunskapsutveckling samt är flexibel vid planeringen och genomförandet av undervisningen. En lärare säger: *"utifrån en grovplanering får jag under resan planera om utifrån gruppen, och sedan inför varje lektion så kan jag behöva göra ytterligare modifieringar"*.

Läraren väljer ut vilka uppgifter som eleven bör koncentrera sig på för att komma vidare utifrån sin kunskapsnivå. Enligt eleverna vid en skola märker läraren snabbt när en elev eller hela klassen inte förstår. *"Om det är en person, förklarar han för den. Om det är flera förklarar han för hela klassen. Om det är djupare svårigheter kallar han in en på resurstid på onsdagen"*. Vissa lärare har separata genomgångar med elever som behöver det. Återkoppling till eleverna bedöms också vara en viktig del. Elever berättar exempelvis att läraren går igenom uppgiften gemensamt med eleven och *"bryter ner talet tills man förstår"*. Vid en skola uppger läraren att hen försöker uppmärksamma och motivera elever som har det svårare genom bland annat extralektioner och möjlighet att göra omprov. Hen brukar även hitta *"kluringar"*, lite mer utmanande uppgifter, till elever som behöver stimulans.

Avslutande diskussion

Vi har i denna granskning sett många skolor där undervisningen ger eleverna goda förutsättningar att utveckla de matematiska förmågorna som anges i gymnasieskolans ämnesplan för matematik. Vi har samtidigt sett skolor där undervisningen i alltför liten utsträckning ger eleverna goda förutsättningar då en stor del av undervisningstiden utgörs av enskilt arbete, där fokus ligger på att eleverna ska lösa uppgifter som liknar de som innefattats i den lärargenomgång som oftast föregått det enskilda arbetet. Läraren går runt i klassrummet och försöker hjälpa så många som möjligt som signalerar att de behöver hjälp. Den här bilden stämmer överens med den bild som finns från tidigare studier och undersökningar; att en övervägande del av undervisningstiden i svenska matematikklassrum ägnas åt så kallad tyst räkning med fokus på att eleverna ska lära in och öva på olika algoritmer (*en algoritm kan beskrivas som en systematisk procedur för hur man genom ett begränsat antal steg utför en beräkning*) i de avsnitt som finns i läroboken.¹⁶

Många lärare använder läroboken genom att presentera ett område i taget, gå igenom exempeluppgifter och sedan låta eleverna räkna de uppgifter som hör till aktuellt område. Undersökande aktiviteter och uppgifter utanför läroboken använder man sparsamt eller inte alls. Det här arbetssättet begränsar elevernas möjlighet att även få arbeta med uppgifter där inte alla förutsättningar är kända. Vi menar att den starka fokuseringen på läroboken kan indikera att det saknas en medveten och tydlig idé om hur undervisningspraktiken ska kopplas till lärandemålen i ämnesplanen för kurs 3c. Denna starka fokusering medför en ökad risk att undervisningen blir uppgiftsorienterad och inte i tillräcklig utsträckning kopplar till lärandemålen och till elevernas olika behov.

De matematiska förmågorna handlar till stor del om att kunna se samband och mönster, bedöma och värdera, uppskatta rimlighet och resonera sig fram till en lösning med mera. För att uppnå detta behöver elever bland annat få möjlighet till reflektion kring hur matematiken fungerar och hur de själva tänker när de arbetar med matematik. Sådan reflektion förutsätter att man får möjlighet att formulera sina tankar och funderingar samt får respons på dem. Därför är det nödvändigt att eleverna får möjlighet att diskutera samt att de får utveckla sin förmåga att resonera. Ljungblad och Lennerstad skriver att elevens kommunikation med läraren är central eftersom eleven utan den är ensam i sitt möte med matematiken.¹⁷

Dagens undervisningskultur i matematik har en förhållandevis lång tradition och har präglat både elever och lärare, vilket troligen gör att ett systematiskt arbete krävs för att åstadkomma förändringar av undervisningen. Matematik är av tradition ett ämne där elevens enskilda arbete med läroboken dominerar, där procedurräkning står i fokus och där det ofta finns få tillfällen till gemensamma reflektioner och diskussioner.¹⁸ Det innebär att matematik av tradition är ett tyst ämne och en allmän föreställning är att undervisning i matematik i första hand går ut på att utföra beräkningar och finna den rätta lösningen. Eleverna har inte i tillräcklig omfattning fått resonera sig fram till en lösning och eleverna uppfattar ofta inte ens det som ett alternativ. I Riesbecks avhandling diskuteras bland annat att elever är obenäpna att ifrågasätta de förutsättningar som ges i samband med så kallade benämnda tal. Enligt Riesbeck är det den rådande skolkulturen som gör att eleverna i de allra flesta fall utgår från att det ska finnas en lösning på uppgifterna (och oftast *en* lösning) samt att alla givna förutsättningar måste användas.¹⁹ I vår granskning kan vi se att det inte alltid finns någon vana att diskutera och reflektera för att tillsammans prova *olika* vägar och metoder. Både elever och lärare är inskolade i att läraren ska ha svar på alla frågor som eleverna kan ställa, vilket vi också har sett i flera av de klassrum vi besökt i

¹⁶ Bergqvist m.fl. 2010, Bergqvist, Boesen och Nyroos 2010, Jonsson m.fl. 2014

¹⁷ Ljungblad och Lennerstad, 2011

¹⁸ Bergqvist, Boesen och Nyroos 2010

¹⁹ Riesbeck, 2008

denna granskning. Detta gör det svårt både för elever och för lärare att lämna "det överenskomna" upplägget av matematiklektionerna.

Det viktigaste för att eleverna ska få möjlighet att utveckla de matematiska förmågorna är att lärarna har strategier och metoder för hur de ska koppla målen till undervisningens genomförande. De aktiviteter eleverna engageras i på lektionerna måste ge dem möjlighet att utvecklas i riktning mot utbildningens mål. I vilken grad läroboken sedan används är egentligen sekundärt. Vi menar att det krävs en matematikundervisning där eleverna i högre grad får diskutera, reflektera, prova sina antaganden, bedöma rimlighet i olika metoder samt får följa och föra resonemang. Dessa diskussioner och reflektioner måste givetvis kopplas till aktiviteter. För att eleverna ska ha möjlighet att utveckla sin matematiska kompetens behöver de i större utsträckning få arbeta med matematiska uppgifter där de måste använda tidigare kunskaper och prova olika lösningar, i en miljö där det är tillåtet att prova sig fram. Eleverna behöver få ökade möjligheter att arbeta med uppgifter där det inte finns en modell att imitera utan där de själva "bygger" lösningen.

Det vi har sett i denna granskning, och i flera tidigare studier och granskningar, är att det sätt på vilket stora delar av matematikundervisningen i skolan i dag är upplagd och genomförs *inte* i tillräcklig utsträckning främjar elevernas utveckling av de matematiska förmågorna. Undervisningsupplägget är fortfarande traditionellt med genomgång som följs av tyst räkning. Detta innebär att eleverna inte får träna på att kommunicera om matematik för att pröva och resonera om olika lösningar på problem. De blir då inte heller tillräckligt rustade för att klara högre utbildning där sådan matematisk förmåga är väsentlig.

Rektorn och lärarnas ansvar

I de flesta granskade skolor har det gjorts kompetensutvecklingsinsatser kring matematik. Majoriteten av lärarna som omfattats av granskningen deltog i den statliga fortbildningsinsatsen Matematiklyftet. Många av lärarna uttryckte sig positivt, framförallt med tanke på att utbildningen gett dem större möjligheter till pedagogiska diskussioner med kollegor. Några av de lärare som deltagit i granskningen uppgav att utbildningen fått dem att förändra sin undervisning till det bättre, genom att exempelvis i högre utsträckning arbeta med de matematiska förmågorna.

För att åstadkomma en kulturändring i undervisningen räcker det dock inte med en engångsinsats utifrån, utan enligt forskningen²⁰ krävs att rektorn aktivt styr och leder utvecklingsarbetet. Det innebär att rektorn behöver vara väl insatt i relevanta styrdokument (vara uppdragskunnig) och tydliggöra de mål för undervisningen som ska uppnås. Att sedan, tillsammans med berörda lärare, styra undervisningen mot dessa gemensamma mål och visioner blir kärnan i att förändra undervisningskulturen. Det innebär att rektorn ser till att det finns en organisation för förändringsarbetet. Det kan handla om att rektorn utser medarbetare som har till uppdrag att driva utvecklingsarbetet. Dessa medarbetare behöver ha ett tydligt uppdrag att ändra undervisning och ett tydligt mandat att driva arbetet. Rektorn behöver också ha fortsatta engagemang i förändringsarbetet, genom att ha en direkt dialog med berörda lärare och genom att följa upp så att den avsedda förändringen i undervisningen slår igenom.

Lärarna behöver samarbeta och ha ett kollegialt lärande.²¹ De behöver ha gemensamma värden för god undervisning och en målbild som tar sin utgångspunkt i de nationella målen. Det handlar dels om att se vad i undervisningen som behöver utvecklas; när målen inte är tydliga för eleverna, när det är för lite diskussion och reflektion, när uppgifterna inte är utmanande, när förväntningarna är för låga; när elevinflytandet är för begränsat; när eleverna inte arbetar med de mer avancerade förmågorna som

²⁰ Ekholm m.fl. 2000; Törnsén 2015; Håkansson och Sundberg 2016

²¹ Skolverket 2013b; Håkansson och Sundberg 2016

exempelvis problemlösning; när stödet uteblir. Dels handlar det om att lärare behöver hjälp att hitta strategier och konkreta verktyg. Det behöver då finnas former för att utbyta erfarenheter kring hur man i praktiken åstadkommer den utveckling man vill se. Exempelvis: Hur kan ett tydligt ledarskap i klassrummet se ut?; Hur kan kursens mål och de förmågor som bör utvecklas i matematik förmedlas för att bli begripliga för eleven?; Hur kan höga förväntningar förmedlas?; Hur kan man föra diskussioner och reflektera kring matematik i klassrummet?; Hur kan man i praktiken arbeta med problemlösning?; Hur anpassar man undervisningen för att i samma klass ge utmaningar och stöd?; Hur kan man använda läromedlen och annat material? På flera av de granskade skolorna har vi sett utmärkt undervisning i det ena klassrummet och undervisning som behöver utvecklas i det andra, vilket gör att det finns goda förutsättningar för ett kollegialt lärande. På vissa av de granskade skolor är det få lärare som undervisar i matematik. I dessa fall kan rektorn behöva söka samarbete utanför skolan för att kunna åstadkomma ett kollegialt lärande.

Rektorn behöver också se till att arbetet följs upp och utvärderas på ett systematiskt sätt för att se till att överenskomna förändringar faktiskt genomförs och att de leder till de resultatförbättringar som avsetts.²² Man behöver ta reda på hur undervisningen ser ut och utvärdera vad som fungerar och vad som inte fungerar och anpassa undervisningen på vägen. Insatser och förändringar behöver i sin tur följas upp och utvärderas. Uppföljningarna kräver en systematik och analys. Det kan exempelvis handla om att samla information genom att filma sin undervisning, observera varandras undervisning och intervjua eleverna och att sedan analysera den informationen. Det är viktigt att också följa upp den undervisning som sker utanför ordinarie lektionstid som de extra och i många fall frivilla stödinsatser (till exempel mattestugor, läxhjälp, studio) som sätts in på många skolor.

Huvudmannens ansvar

Huvudmannen har också ett ansvar för att följa upp verksamheten och se till att skolorna har de förutsättningar som behövs för att bedriva en undervisning som ger elever möjligheter att utveckla de olika matematiska förmågor som utbildningen i kurs 3 c syftar till.

Ett av de mest centrala verktygen som en huvudman har för att styra sin verksamhet är uppföljning. Det är tydligt reglerat i skollagen. Huvudmannen behöver skaffa sig en tillräcklig bild av vilken kvalitet matematikutbildningen i enskilda skolor håller.

Förutsättningar som behövs för att bedriva en undervisning som ger eleverna goda möjligheter att utveckla matematiska förmågor handlar om resurser och behöriga lärare men även exempelvis om kompetensutveckling och kursens längd. Flera lärare i de skolor som har ett utvecklingsbehov uppger att det är svårt att hinna med kursens innehåll utifrån de timmar de fått. Undervisningstiden verkar i flertalet fall läggas ut efter en schablon. Det är relativt ofta otydligt vilka pedagogiska överväganden som gjorts när man bestämt kurslängd. Utlägget av timmar vid de skolor vi granskat varierar mellan knappt 80 och 100 för kursen som är på 100 poäng.

Många lärare upplever också att det är svårt att hinna med att stödja och utmana alla elever. Flera lärare i de granskade skolorna anser att eleverna har för dåliga förkunskaper för att de ska hinna med kursen inom undervisningstiden. Bristande kunskaper i matematik från grundskolan är något som bland annat Skolverket visat är relativt vanligt och ett ökande problem.²³ Upplevd tidsbrist behöver dock inte nödvändigtvis bero på att de förutsättningar som ges inte är tillräckliga. Den upplevda tidsbristen kan också bero på hur läraren planerat och utformat undervisningen. Vad den upplevda tidsbristen beror på behöver dock huvudmannen ta reda på och ha en dialog med rektorn för att kunna

²² Ekholm m.fl. 2000; Skolverket 2013b; Törnsén 2015

²³ Skolverket 2010

avgöra om rätt förutsättningar ges. Vid utökade resurser bör huvudmannen koppla insatser för att till exempel utveckla undervisningen och insatserna måste följas upp för att se om de fått avsedd effekt.

Sammanfattningsvis krävs ett ansvarstagande, nära samarbete och dialog i hela styrkedjan för att alla skolor ska lyckas med att ge samtliga elever möjligheter att utveckla de olika matematiska förmågor som utbildningen i kurs 3c syftar till. Detta är förmågor som är viktiga för elever som vill gå vidare med högskolestudier. Det är också förmågor som kan vara viktiga för elever i kommande yrkesliv.

Bakgrund, syfte och frågeställningar

Enligt internationellt jämförande undersökningar²⁴ har svenska elever låga kunskaperna i matematik. Undersökningarna visar även på en resultatnedgång över tid.²⁵ Sverige är ett av de fåtal länder som visar en kontinuerlig resultatförsämring under hela 2000-talet.²⁶ Studier visar att elever, både i grund- och gymnasieskolan, inte får tillräckliga möjligheter att öva på samtliga matematiska förmågorna. Eleverna har till exempel endast begränsade möjligheter att utveckla sin problemlösningsförmåga samt att träna sin förmåga att se samband mellan olika matematiska begrepp.²⁷ En orsak till de låga resultaten i de internationella studierna är enligt Skolverket att matematikundervisningen är starkt inriktad på lösningsprocedurer, vilket bland annat innebär att eleverna inte får förutsättningar att förstå hur olika moment i matematik hänger ihop.²⁸ Högskoleverkets utvärderingar visar också att eleverna, när de kommer till högskolan som studenter, har bristande förkunskaper och därmed svårigheter att klara matematikkurserna.²⁹

Mot bakgrund av den bild som skisserats ovan fann Skolinspektionen det angeläget att granska vilka möjligheter elever som läser matematik på senare nivå i gymnasieskolan får att utveckla sin begrepps- och problemlösningsförmåga.

Granskningens syfte har varit att granska om undervisningen i kursen matematik 3c i gymnasieskolan utformas så att eleverna får möjlighet att utveckla sin begrepps- och problemlösningsförmåga. För att uppfylla detta syfte har följande frågeställning varit utgångspunkt för granskningen;

1. Innehåller undervisningen moment och uppgifter samt är utformad så att elevernas problemlösnings- och begreppsförmåga utvecklas?
 - 1.1. Konkretiserar och förklarar läraren de nationella målen om problemlösning och begreppsförståelse?
 - 1.2. Får eleverna möta och arbeta med matematiska problem och begrepp i undervisningen?
 - 1.3. Får eleverna föra resonemang, diskutera och reflektera?
 - 1.4. Anpassas undervisningen till elevernas behov, så att eleverna får såväl stöd som stimulans och utmaningar?

²⁴ TIMSS, TIMSS Advanced och PISA

²⁵ Skolverket 2008, 2009, 2012, 2013

²⁶ Skolverket 2012

²⁷ Bergqvist 2010, Skolinspektionen 2009, 2010

²⁸ Skolverket 2010

²⁹ Högskoleverket 2009

Metod och genomförande

Granskningen har avgränsats till att omfatta matematik kurs 3c som läses av alla elever på naturvetenskaps- och teknikprogrammet, oavsett val av inriktning på programmen. Kurs 3c kan läsas inom ramen för programfördjupning av elever på andra program än naturvetenskapsprogrammet och teknikprogrammet men läses främst av elever på dessa två program då den där är obligatorisk.

Urvalet av de skolenheter som omfattats av granskning har skett slumpmässigt, dock har skolor där regelbunden tillsyn pågått under granskningsperioden uteslutits. Två kriterier för urval av skolenheter har också varit att skolenheten bedrev undervisning i minst ett av de två nämnda programmen samt att undervisning i kurs 3c pågick under projektets besöksperiod.

Granskningen har genomförts med utgångspunkt i Skolinspektionens modell för ämnesgranskningar som innefattar följande datainsamlingsmetoder; dokumentstudier, statistik, intervjuer, observationer och enkäter. För att samla in empiri i aktuell granskning har vi begärt in skriftligt material i form av en verksamhetsredogörelse, lärares undervisningsplanering, förteckning över tryckta och andra läromedel som används i undervisningen. Vidare har vi genomfört lektionsobservationer, intervjuer med elever, lärare och skolledare samt en elevenkät. Intervju- och enkätfrågor har tagits fram med utgångspunkt i projektets frågeställningar. Totalt har 170 intervjuer och 65 observationer genomförts. Elevenkäten gick ut till samtliga elever som under granskningsperioden läste kurs matematik 3 c på de skolor som omfattades av granskningen, drygt 2000 elever. Svarsfrekvensen var 54 procent. Det insamlade materialet har sedan analyserats i förhållande till de bedömningspunkter och indikatorer som utvecklats utifrån de ursprungliga frågeställningarna. Skolbesöken genomfördes främst våren 2015.

Referenser

- Alfredsson, L, Bråting, K, Erixon, P, Heikne, H (2012) *Matematik 5000 – Kurs 3c Blå lärobok*, Stockholm: Natur & Kultur
- Bergqvist, E. m.fl. (2010) *Matematikutbildningens mål och undervisningens ändamålsenlighet: Gymnasieskolan hösten 2009*, Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs universitet.
- Bergqvist, T, Boesen, J och Nyroos, M (2010) *Vad vet vi om hur matematiklärare arbetar för att utveckla elevernas matematikkunskaper?*, Göteborg och Umeå: Nationellt centrum för matematikutbildning vid Göteborgs universitet och Umeå forskningscentrum för matematikdidaktik vid Umeå universitet.
- Högskoleverket (2009) *Förkunskaper och krav i högre utbildning*, Rapport 2009:16, Stockholm: Högskoleverket.
- Håkansson, J. och Sundberg, D. (2012) Utmärkt undervisning: Framgångsfaktorer i svensk och internationell belysning, Stockholm: Natur och Kultur.
- Jonsson, B, Norqvist, M, Liljekvist, Y och Lithner, J (2014) *Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning*, Journal of Mathematical Behavior.
- Ljungblad, A-L och Lennerstad, H (2011) *Matematik och respekt – matematikens mångfald och lyssnandets konst*, Stockholm: Liber.
- Riesbeck, E (2008) *På tal om matematik – matematiken, vardagen och den matematikdidaktiska diskursen*. Lund: Studentlitteratur.
- Skolinspektionen (2009) *Undervisningen i matematik – utbildningens innehåll och ändamålsenlighet*, Rapport 2009:5, Stockholm: Skolinspektionen.
- Skolinspektionen (2010) *Undervisningen i matematik i gymnasieskolan*, Rapport 2010:13, Stockholm: Skolinspektionen.
- Skolverket (2008) *TIMSS 2007: Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*, Rapport 323, Stockholm: Fritzes.
- Skolverket (2009) *TIMSS Advanced 2008: Svenska gymnasieelevers kunskaper i avancerad matematik och fysik i ett internationellt perspektiv*, Rapport 336, Stockholm: Fritzes.
- Skolverket (2010) *Svenska elevers kunskaper i TIMSS Advanced 2008 och 1995: En djupanalys av hur eleverna i gymnasieskolan förstår centrala begrepp inom matematiken*, Analysrapport till 336 2009, Stockholm: Fritzes.
- Skolverket (2011a) *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola 2011*, Stockholm: Fritzes.
- Skolverket (2011b) *Matematik, Ämnesplan*,
<http://www.skolverket.se/laroplaner-amnen-och-kurser/gymnasieutbildning>
- Skolverket (2012) *TIMSS 2011: Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*, Rapport 380, Stockholm: Fritzes.
- Skolverket (2013) *PISA 2012: 15-åringars kunskaper i matematik, läsförståelse och naturvetenskap*, Rapport 398, Stockholm: Fritzes.
- Szabo, A, Larson, N, Viklund, G, Dufåker, D, Marklund, M (2012) *matematik origo 3c*, Stockholm: Sasonoma Utbildning.

Bilagor

Referenspersoner

- Johan Lithner (professor i matematisk didaktik, institutionen för naturvetenskapernas och matematikens didaktik, Umeå universitet)
- Per-Olof Bentley (fil.dr. i ämnesdidaktik med inriktning mot matematik, f.d. verksam vid institutionen för didaktik och pedagogisk profession, Göteborgs universitet)
- Erika Stadler (undervisningsråd, Skolverket).

Skolor och huvudmän som ingått i granskningen

- **ABB Industrigymnasium Västerås**
 - huvudman; Industritekniska Gymnasiet Bergslagen AB
- **Allvar Gullstrandsgymnasiet**
 - huvudman; Landskrona kommun
- **Angeredsgymnasiet**
 - huvudman; Göteborgs kommun
- **Berzeliuskolan**
 - huvudman; Linköpings kommun
- **Göteborgs Högre Samskola**
 - huvudman; Stiftelsen Göteborgs Högre Samskola
- **Hagagymnasiet**
 - huvudman; Norrköpings kommun
- **Helixgymnasiet Borlänge**
 - huvudman; Helixutbildningar AB
- **Hermods Gymnasium Stockholm**
 - huvudman; Hermods AB
- **Hvitfeldtska gymnasiet**
 - huvudman; Göteborgs kommun
- **IT-gymnasiet Kristianstad**
 - huvudman; IT- Gymnasiet Sverige AB
- **IT-gymnasiet Södertörn**
 - huvudman; IT- Gymnasiet Sverige AB
- **International IT College of Sweden Stockholm**
 - huvudman; Edinit AB
- **JENSEN Gymnasium Uppsala**
 - huvudman; JENSEN Education College AB
- **Katedralskolan**
 - huvudman; Skara kommun
- **Klara Gymnasium Linköping**
 - huvudman; Klaragymnasiet AB
- **Klara Södra Gymnasium Stockholm**
 - huvudman; Klaragymnasiet AB

- **Kunskapsgymnasiet Norrköping**
 - huvudman; Kunskapsskolan i Sverige AB
- **Luspengymnasiet**
 - huvudman; Storumans kommun
- **Malmö Latinskola**
 - huvudman; Malmö kommun
- **Marks gymnasieskola**
 - huvudman; Marks kommun
- **NTI Gymnasiet Sundsvall**
 - huvudman; Nordens Teknikerinstitut AB
- **Risbergska skolan**
 - huvudman; Örebro kommun
- **Sandagymnasiet**
 - huvudman; Jönköpings kommun
- **Soltorgsgymnasiet**
 - huvudman; Borlänge kommun
- **Sunnerbogymnasiet**
 - huvudman; Ljungby kommun
- **Tannbergsskolan**
 - huvudman; Lycksele kommun
- **Thorildsplans Gymnasium**
 - huvudman; Stockholms kommun
- **Västerhöjd**
 - huvudman; Skövde kommun
- **Westerlundska gymnasiet**
 - huvudman; Enköpings kommun
- **Wijkmanska gymnasiet**
 - huvudman; Västerås kommun
- **Ådalsskolan**
 - huvudman; Kramfors kommun
- **Åbyskolan**
 - huvudman; Klippans kommun
- **Östrabogymnasiet**
 - huvudman; Uddevalla kommun

Kunskapsöversikt

Kvalitetsgranskning av undervisning i matematik i gymnasieskolan •

2014-09-10

28

(37)

Dnr 400-2014:2725

Kunskapsöversikt för kvalitetsgranskning av undervisning i matematik i gymnasieskolan

1. Bakgrund

Svenska gymnasieelever uppvisar svaga matematikkunskaper – i synnerhet när det gäller kunskaper i gymnasieskolans högre matematikkurser. De svaga resultaten innebär risk för att färre elever klarar av gymnasieskolans högre matematiska kurser. I förlängningen begränsas även elevernas möjligheter till fortsatta studier på högskolor och universitet, liksom elevers möjligheter att klara av uppgifter i arbetslivet som kräver goda matematiska kunskaper. Denna problembild utvecklas i kunskapsöversikten i en beskrivning av kunskapsläget (avsnitt 2), vilken mynnar ut i ett problem- och riskområde (avsnitt 3) som ligger till grund för granskningen. Innan kunskapsläget beskrivs mer ingående ges först en överblick nedan över ämnet matematik i gymnasieskolan.

1.1 Gymnasieskolans matematikkurser – en överblick

Matematikämnet i gymnasieskolan är indelat i 100-poängskurser på fem nivåer, Matematik 1–5, enligt den struktur som beskrivs nedan (Skolverket 2011a). De tre inledande nivåerna har parallella ”spår” för olika typer av gymnasieprogram:

- A-spåret: För yrkesprogrammen finns ett a-spår med en inledande kurs och en påbyggnadskurs om vardera 100 poäng (kurserna 1a och 2a). Samtliga kurser tar vid och bygger vidare på grundskolans matematikundervisning.
- B-spåret: För ekonomiprogrammet, estetiska programmet, humanistiska programmet och samhällsvetenskapsprogrammet finns ett b-spår med tre kurser vardera om 100 poäng (kurserna 1b, 2b och 3b).
- C-spåret: För naturvetenskapsprogrammet och teknikprogrammet finns också ett c-spår med tre kurser vardera om 100 poäng (kurserna 1c, 2c och 3c). Elever på yrkesprogrammen som vill läsa mer matematik går över till b- eller c-spåret för den tredje kursen.
- Därutöver finns nivåerna 4 och 5, med kurser som gäller för samtliga tre spår.

Det kan tilläggas att tidigare, i den gymnasieskola som byggde på Lpo 94 och kursplanerna från år 2000, var matematikundervisningen uppbyggd utifrån kurserna A–E. Kursen Matematik A behandlade den mest grundläggande nivån och Matematik E den mest avancerade (Skolverket 2013b). I beskrivningen av elevernas måluppfyllelse i matematik och i vissa av

de forskningsstudier som refereras i avsnitt 2 hänvisas till dessa matematikkurser som fanns i den tidigare gymnasieskolan.

1.2 Gymnasieskolans ämnesplan för matematik

Enligt gymnasieskolans ämnesplan för matematik (Skolverket 2011b) är det övergripande syftet med undervisningen i matematik att utveckla elevernas förmåga att arbeta matematiskt. I syftesbeskrivningen utvecklas sedan vad detta innebär. Syftet avslutas med att sammanfatta de långsiktiga förmågor eleverna ska utveckla i ämnet. De matematiska förmågor eleverna ska ges förutsättningar att utveckla i ämnet är att:

1. använda och beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen.
2. hantera matematiska procedurer och lösa uppgifter av standardkaraktär utan och med verktyg.
3. formulera, analysera och lösa matematiska problem samt värdera valda strategier, metoder och resultat.
4. tolka en realistisk situation och utforma en matematisk modell samt använda och utvärdera en modells egenskaper och begränsningar.
5. följa, föra och bedöma matematiska resonemang.
6. kommunicera matematiska tankegångar muntligt, skriftligt och i handling.
7. relatera matematiken till dess betydelse och användning inom andra ämnen, i ett yrkesmässigt, samhälleligt och historiskt sammanhang.

Dessa sju förmågor ska eleverna ges förutsättningar att utveckla i ämnet oberoende av vilken kurs de läser. Förmågorna anger inte vilket substantiellt matematiskt innehåll eleverna ska arbeta med, utan det preciseras i det *centrala innehållet*. Det som också särskiljer de olika kurserna från varandra är att det centrala innehållet varierar.

1.3. Gymnasieelevers kursbetyg och provbetyg i ämnet matematik

När det gäller gymnasieelevers kursbetyg i matematik visar data för läsåret 2012/13 (senaste tillgängliga statistiken från Skolverket) att andelen elever som erhöll minst betyget Godkänt på matematikkurserna A-E varierade mellan 90 och 97 procent. På kursen Matematik A var andelen 96,7 procent, Matematik B 88,7 procent, Matematik C 88,1 procent, Matematik D 93,2 procent och Matematik E 91,1 procent.

Resultaten på de nationella proven för de olika matematikkurserna hösten 2013 (senaste tillgängliga statistiken från Skolverket) visar på ganska kraftiga variationer mellan de olika kurserna. Resultaten på kurserna inom "a-spåret" är generellt lägre än resultaten på kurserna inom "b-spåret", vilka i sin tur är lägre än resultaten på kurserna inom "c-spåret":

- A-spåret: På kursen Matematik 1a erhöll 70,5 procent av eleverna minst provbetyget Godkänt, och på kursen 2a var denna andel av eleverna 48,2 procent.
- B-spåret: På kursen 1b erhöll 80,8 procent av eleverna minst provbetyget Godkänt. På kursen 2b var denna andel av eleverna 64,7 procent och på kursen 3b 78,8 procent.

- C-spåret: På kursen 1c erhöll 95,8 procent av eleverna minst provbetyget Godkänt. På kursen 2c var denna andel av eleverna 87,0 procent och på kursen 3c 86,9 procent.

1.4 Nationella satsningar på matematik

Med anledning av elevers försämrade matematikkunskaper har den svenska regeringen vidtagit och aviserat flera åtgärder för att förbättra kunskaperna. Från och med hösten 2012 finns en särskild fortbildningsatsning för matematiklärare, det så kallade Matematiklyftet. Syftet med Matematiklyftet är att öka elevernas måluppfyllelse i ämnet. Matematiklyftet baseras på kollegialt lärande med expertstöd i form av speciellt utbildade matematikhandledare. Skolverket har i uppdrag att svara för denna satsning och ska även utveckla en särskild webbplattform för utbildningen (Utbildningsdepartementet 2012). Inom ramen för Lärarlyftet II, som är en satsning mot att lärare ska bli behöriga i alla skolformer, ämnen och årskurser de undervisar i, ska Skolverket särskilt ta hänsyn till att många lärare behöver högskoleutbildning i ämnet matematik. Ett skäl till detta är att i grundskolans senare årskurser saknar var tredje lärare i matematik lärarexamen i ämnet (Utbildningsdepartementet 2011).

Från och med höstterminen år 2013 utökas undervisningstiden i matematik med 120 undervisningstimmar för grundskolan, grundsärskolan, specialskolan och sameskolan. Ändringen gäller för elever som börjar årskurs 1 höstterminen 2013. För övriga elever finns övergångsbestämmelser (Prop. 2012/13:64).

Regeringen aviserade i budgetpropositionen för år 2014 att öka undervisningstiden i matematik med en timme i veckan för årskurs 4–6 från och med läsåret 2016/17. Regeringen har även aviserat att undervisningstiden i matematik ska utökas med en timme i veckan för elever i årskurs 7–9 från och med höstterminen år 2016 (Regeringskansliet 2014).

Sedan hösten år 2009 pågår en försöksverksamhet med riksrekryterande spetsutbildningar inom olika ämnen i gymnasieskolan, bland annat matematik. Syftet är att elever ska fördjupa och bredda sina kunskaper i bland annat matematik. Spetsutbildning ska möjliggöra för eleven att läsa kurser vid universitet eller högskola parallellt med sina gymnasiestudier (Förordning 2008:793 om försöksverksamhet med riksrekryterande gymnasial spetsutbildning). Från och med hösten 2013 finns även försöksverksamhet med riksrekryterande spetsutbildningar i matematik på högstadiet.

2. Kunskapsläget

2.1 Skolinspektionens erfarenheter

Skolinspektionen har tidigare genomfört två kvalitetsgranskningar av skolans matematikundervisning. Den första granskningen genomfördes år 2008–2009 och berörde grundskolans matematikundervisning, med inriktning mot årskurs 3, 5 och 9 där nationella prov förekom. I granskningen ingick 23 grundskolor. Frågeställningarna handlade om elevernas medvetenhet om målen, lärarnas kompetens och rektorernas ansvarstagande, bedömning och betygsättning samt elevernas medvetenhet om målen. Ett av huvudresultaten var att eleverna inte får möjlighet att utveckla alla förmågor i ämnet. Eleverna får begränsade möjligheter att ut-

veckla förmågor såsom problemlösning och förmåga att sätta in matematiska problem i sammanhang, förmåga att se samband och resonera, och förmåga att uttrycka sig såväl muntligt som skriftligt. Anledningen är bland annat att få lärare har tillräcklig kunskap om målen i kursplaner och i läroplanen, och att eleverna ofta räknar själva i läroböckerna. Andra centrala resultat var att många rektorer behöver inta en mer aktiv roll när det gäller att undervisningen utgår från de nationella kunskapsmålen, och att skillnaderna mellan resultat på nationella ämnesprov och slutbetyg i matematik var anmärkningsvärt stor på många skolor (Skolinspektionen 2009).

Skolinspektionens andra kvalitetsgranskning i ämnet matematik genomfördes år 2009–2010 och då granskades kursen Matematik A vid 55 gymnasieskolor. Frågeställningarna handlade om variation i innehåll och arbetsform i matematikundervisningen, och om lärarnas pedagogiska utbildning och kompetens. Huvudresultaten visade på stora likheter med huvudresultaten från den första granskningen, nämligen att flertalet elever endast får undervisning i begränsade delar av ämnet eller kursen (i detta fall Matematik A). Därmed får de inte heller förutsättningar att utveckla olika förmågor som problemlösning, förmåga att se samband, resonera och uttrycka sig såväl muntligt som skriftligt eller hantera matematiska procedurer. Många elever är också understimulerade och får inte den utmaning som behövs för att de ska kunna utvecklas utifrån sina förutsättningar. Resultaten visar också att flertalet lärare har otillräckliga kunskaper om kursplanen, och att kursplanen sammantaget verkar ha en svag eller obefintlig styrning för lärarna (Skolinspektionen 2010).

2.2 Resultat från utredningar och forskning

Svenska elevers matematikkunskaper i internationella mätningar

Svenska gymnasieelever har deltagit i den internationella kunskapsmätningen TIMSS Advanced vid två tillfällen – åren 1995 och 2008. TIMSS Advanced (*Trends in International Mathematics and Science Study*) är en internationell jämförande studie i tio länder som undersöker elevers kunskaper i avancerad matematik och fysik i gymnasieskolans sista år. Proven mäter de kunskaper och förmågor som de deltagande länderna genom kompromisser kommit överens om är relevanta att mäta utifrån ländernas läroplaner och kursplaner. Undersökningen år 2008 genomfördes i Sverige av ett urval elever som gick på naturvetenskapligt och tekniskt program, och som hade läst minst Matematik D och Fysik B. När det gäller matematik mäts elevers prestationer inom områdena algebra, differential- och integralkalkyl samt geometri (Skolverket 2009).

Resultaten i TIMSS Advanced 2008 visar att i jämförelse med övriga länder som deltog i undersökningen presterar svenska elever på en låg nivå i genomsnitt. Svenska elever uppvisar också en kraftig resultatnedgång i matematik jämfört med år 1995, då de svenska elevernas prestationer motsvarade det internationella genomsnittet och även låg på en högre resultatnivå i absoluta poäng. Resultatförsämringen har varit större för de lägre presterande eleverna jämfört med de högre presterande eleverna, även om samtliga grupper uppvisar en nedgång. Svenska elever uppvisar inte några styrkor eller svagheter inom några särskilda av

de tre innehållsliga områdena på provet, utan ligger på en ganska jämn låg nivå (Skolverket 2009).

I TIMSS Advanced 2008 samlades också information om en rad övriga faktorer kopplade till matematikundervisningen, bland annat aktiviteter på matematiklektionerna. När det gäller lektionsinnehållet kan det noteras att svenska elever, förutom att memorera formler och beräkningsprocedurer, ligger lågt när det gäller att diskutera strategier för problemlösning och argumentera för sina resonemang (Skolverket 2009). Att eleverna ges för få möjligheter att utveckla och träna matematisk problemlösning är något Skolinspektionen också noterat i sina tidigare kvalitetsgranskningar (som tidigare nämnts), och som Skolverket menar är ett av problemen med gymnasieskolans matematikundervisning och en av förklaringarna till de svenska elevernas svaga resultat i TIMSS Advanced 2008 (se nedan).

Det kan noteras att svenska elever uppvisar inte bara svaga matematikkunskaper i gymnasieskolan, utan även i grundskolan. I undersökningen PISA (*Programme for International Student Assessment*) från år 2012 bekräftas att också svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik har försämrats under det senaste decenniet. Resultatförsämringen gäller både låg- och högpresterande elever. Men det är inte bara kunskapsresultaten som försämrats enligt PISA. Sverige är ett av få länder där både de genomsnittliga resultaten och likvärdigheten har försämrats. Under det senaste decenniet har skillnaderna mellan hög- och lågpresterande elever ökat samtidigt som skillnaderna mellan skolor har ökat. Dessutom har betydelsen av den socioekonomiska bakgrunden förstärkts både på individ- och skolnivå (Skolverket 2013a). Av ett kompletterande PISA-prov som testat elevers digitala förmåga att lösa problem framgår även att svenska elever presenterar under OECD-genomsnittet. Problemlösningsförmåga har en stark koppling till bland annat kritiskt tänkande, kreativitet och uthållighet (Skolverket 2014).

Studien TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*) visar att svenska elever i årskurs 4 har lägre resultat i matematik jämfört med genomsnittet för elever i EU-/OECD-länder. Resultaten för eleverna i årskurs 4 är i stort sett de samma år 2011 som de var vid den föregående mätningen år 2007. Resultaten för elever i årskurs 8 har försämrats ytterligare vid denna mätning jämfört med tidigare mätningar. Sverige är ett av de fåtal länder som visar en kontinuerlig resultatförsämring under hela 2000-talet (Skolverket 2012).

Gymnasieelevers förkunskaper i matematik och högskolestudier

Även om matematikundervisningen i gymnasieskolan har som primärt mål att eleverna ska uppnå målen i läroplanen och ämnesplanen för matematik ingår det samtidigt att gymnasieskolan också ska förbereda eleverna för högskolestudier och yrkeslivet. Skollagen är tydlig med att de högskoleförberedande programmen ska utgöra grund för fortsatt utbildning på högskolenivå (Skollagen 2010:800, 16 kap. 4 §).

I Högskoleverkets utvärdering *Förkunskaper och krav i högre utbildning* (Högskoleverket 2009) är ett av de huvudresultat som lyfts fram att många högskolelärare anser att studenternas förkunskaper i matematik har försvagats under senare år och motsvarar inte högskolans förväntningar. Högskoleverket framhåller i utvärderingen att goda förkunskaper i matematik behövs självklart i utbildningar i matematik, teknik och naturvetenskap, men även inom

vårdområdet, ekonomiområdet och flera andra samhällsvetenskapliga utbildningar där studenterna behöver kunna utföra matematiska beräkningar. Inom högskolan ägnas därför mer undervisningstid än tidigare åt repetition, och sänkta betygskrav har konstaterats. Kungliga tekniska högskolan (KTH) menar också att studenternas förkunskaper i matematik försämrats under senare år. I de förkunskapstest som genomförs hos nybörjarstudenterna på civilingenjörsprogrammet och andra program vid KTH konstateras en kraftig nedgång i resultaten skett sedan millennieskiftet (Brandell 2013).

Gymnasieskolans matematikundervisning

Avsnitten ovan har beskrivit matematikkunskaper hos svenska elever, med fokus på gymnasieelever, i internationella kunskapsmätningar och svenska utvärderingar. Det generella mönstret är att eleverna har svaga och otillräckliga kunskaper. Vad visar forskning och utvärderingar när det gäller själva undervisningen i matematik och dess utformning? Finns det problem i denna som förklarar de svaga matematikkunskaperna?

Skolverket genomförde åren 2000–2001 en nationell kvalitetsgranskning när det gäller elevers lust att lära, med fokus på matematik (Skolverket 2003). Av den framgår att matematiken i gymnasieskolan upplevs av många elever som ett relativt svårt ämne. Många elever säger sig vara nöjda med matematikundervisningen och ett av argumenten är att de inte tror att det går att göra på annat sätt. Samtidigt tycker många att undervisningen är enformig och många förstår inte heller varför de ska lära sig matematik. Undervisningen präglas av mycket enskilt arbete med få diskussioner och lärarledda genomgångar. Kvalitetsgranskningen pekar på en rad faktorer som har betydelse för elevernas motivation och matematikutbildningens kvalitet. Bland annat framhålls följande faktorer som betydelsefulla för elevernas möjligheter att tillägna sig matematikundervisningen:

- Ett gott socialt klimat mellan lärare och elev och gemensamma samtal som utvecklar elevernas begreppsförståelse och matematiska tänkande. Reflektion och samtal kring olika sätt att tänka kring och lösa matematiska problem.
- En varierad undervisning med större flexibilitet och högre anpassning till olika elevers och elevgruppers förkunskaper, intressen och studieinriktningar.
- Ett relevant och begripligt innehåll och uppgifter som utmanar.

I anslutning till TIMSS Advanced 2008 gjordes i Sverige en fördjupad analys av elevernas provsvar och orsakerna bakom de svenska elevernas svaga provresultat (Skolverket 2010). I denna fördjupningsstudie presenterades tre förklaringar till varför de svenska eleverna i de högre matematikkurserna har svaga matematikkunskaper:

- Matematikundervisningen är för starkt inriktad på lösningsprocedurer. Eleverna lär sig att göra beräkningar, men de har ingen begreppslig förankring och lära sig inte att förstå hur de olika momenten i matematik hänger ihop. Utan en begreppslig förankring får eleverna svårt att lösa matematiska problem, det vill säga uppgifter som kräver användning av tidigare kunskaper i nya och obekanta situationer.
- Eleverna har sämre förkunskaper i matematik från grundskolan än tidigare. Skillnaden motsvarar ungefär ett års matematikstudier, och det finns inte möjligheter för eleverna att repetera eller ta igen de studierna under gymnasietiden.

- Undervisningsuppehållet i den svenska matematikundervisningen inverkar negativt på elevernas resultat, eftersom det kan vara upp till ett års uppehåll mellan de olika matematikkurserna. Matematik är ett ämne som är mer känsligt för glömska än andra ämnen och framför allt när det gäller procedurellt inlärda kunskaper.

I samband med Skolinspektionens två tidigare kvalitetsgranskningar av matematikundervisningen framtog särskilda forskarrapporter som komplement till myndighetens egna skolbeslut. Rapporterna skrevs av forskare från Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM) vid Göteborgs universitet och Umeå forskningscentrum för matematikdidaktik (UFM) vid Umeå universitet. Forskarrapporterna bygger på de lektionsobservationer, intervjuer och enkätundersökningar som forskarna och Skolinspektionens inspektörer genomförde vid skolbesöken.

I den forskarrapport som framtog inom ramen för granskningen av gymnasieskolans matematikundervisning konstateras bland annat att enskilt arbete (eller i liten grupp) med matematikuppgifter är den vanligaste arbetsformen i de klassrum som observerats (Bergqvist m.fl. 2010). Detta arbete fördelar sig på arbete med matematikuppgifter i den egna läroboken (cirka 3/4 av lektionstiden), och arbete med matematikuppgifter eleverna får av läraren (cirka 1/4). Vidare är ett centralt resultat från lektionsobservationerna att procedurhantering är den klart vanligaste kompetensaktiviteten, särskilt i arbete med läroboksuppgifter. Forskarna framhåller att studien visar i stora drag att undervisningen är otillräcklig när det gäller möjligheterna för eleverna att utveckla centrala matematiska kompetenser, utöver procedurhantering. De implikationer forskarna framhåller för undervisningen är bland annat att målen måste klargöras i undervisningen (utan vägledning är det inte möjligt att fokusera utvecklingen) och att läroböckerna bör tillhandahålla rikare matematikuppgifter för eleverna.

I den forskarrapport som framtog inom ramen för grundskolans matematikundervisning var ett av huvudresultaten att lärarna behöver bli mer medvetna om vilka kompetenser (förmågor) undervisningen ska behandla, och tydligt klargöra dessa för eleverna (Bergqvist m.fl. 2009). Risken är annars att undervisningen blir för snävt inriktad på "mekanisk" räkning av uppgifter med procedurkaraktär, och att andra viktiga kompetenser som att lösa matematiska problem, föra resonemang kring och argumentera, etc trängs undan. Liknande resultat framkom således också i forskarnas analys av gymnasieskolans matematikundervisning (se ovan).

I en sammanfattande studie vid Göteborgs och Umeå universitet över kunskapen om lärares arbete i matematikundervisningen framgår att den arbetsform som dominerar är den där elever arbetar enskilt med eller utan lärarhandledning (Bergqvist, Boesen och Nyroos 2010). Vidare konstateras att algoritm- och procedurfrågorna står i fokus, liksom att det förekommer få tillfällen för gemensam reflexion eller gemensamma diskussioner. Läroboken har också en stark ställning. I samma studie lyfts betydelsen av god kommunikation i klassrummet fram som en förutsättning för att ge elever goda möjligheter att lära. Detta kontrasterar mot beskrivningen av hur många lärare arbetar. Vidare framgår också att det procedur- eller algoritmfokus som tycks vara utbrett också bär med sig nackdelar för elevers förutsättningar att lära, bland annat mot bakgrund av att det råder en obalans mellan å ena sidan algoritmer och å andra sidan problemlösning och kreativitet.

Att undervisningen i alltför hög grad utgörs av att eleverna räknar enskilt utan tillräcklig handledning eller återkoppling från lärare påpekades även av Matematikdelegationen redan 2004 i sitt betänkande (SOU 2004:97).

3. Problembild och riskområde

Kunskapsläget indikerar att svenska gymnasieelever har svaga matematikkunskaper i de högre matematikkurserna och att en försämring av elevernas kunskaper skett över tid. En av orsakerna till detta problem antas vara det sätt på vilken matematikundervisningen utformas. Den dominerande arbetsformen i matematikundervisningen är att eleverna arbetar enskilt med matematikuppgifter i den egna läroboken. De uppgifter som finns i läroböckerna är dessutom främst av procedurell karaktär, det vill säga handlar om att eleverna ska träna och uppöva förmågan att förstå vissa räkneprocedurer. Den konsekvens som detta antas få är att eleverna då inte i tillräcklig grad utvecklar andra centrala förmågor, som att förstå viktiga matematiska begrepp och lösa matematiska problem. Matematikundervisningen blir således för snävt inriktad. Forskning och utredning indikerar också att det finns anpassningsproblem i undervisningen – gentemot såväl de elever som har med sig svaga matematikkunskaper från grundskolan och gentemot de elever som lättare når målen och behöver mer utmanande undervisning.

Ovanstående problembeskrivning förstärks också av att många av högskolans lärare menar att studenternas förkunskaper i matematik försämrats på senare år, vilket medfört att studenterna har sämre förutsättningar att tillgodogöra sig utbildningar där det krävs goda kunskaper i matematik.

Den problembild som beskrivits ovan innebär en klar risk för att eleverna i gymnasieskolan inte rustas tillräckligt väl för fortsatta högskolestudier, där goda förkunskaper i matematik krävs. Det kan medföra att studenterna får så stora svårigheter att tillgodogöra sig högskoleutbildningen att de tvingas till studieavbrott, trots högskolans försök till stöd och anpassning. Det innebär också en risk att de elever som går direkt ut i arbetslivet inte är tillräckligt rustade, för att utföra sådana arbetsuppgifter som kräver goda förkunskaper i matematik.

Mot bakgrund av ovanstående problem- och riskbild ska Skolinspektionen granska den högre matematikundervisningen i gymnasieskolan, för att se om den utformas så att den inte är för snävt inriktad utan ger eleverna möjlighet att utveckla sin problemlösningsförmåga och begreppsförståelse.

Referenser

- Bergqvist, E. m.fl. (2009) *Matematikutbildningens mål och undervisningens ändamålsenlighet: Grundskolan våren 2009*, Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs universitet.
- Bergqvist, E. m.fl. (2010) *Matematikutbildningens mål och undervisningens ändamålsenlighet: Gymnasieskolan hösten 2009*, Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs universitet.
- Bergqvist, T., Boesen, J. och Nyroos, M. (2010) *Vad vet vi om hur matematiklärare arbetar för att utveckla elevers matematikkunskaper?*, Göteborg och Umeå: Nationellt centrum för matematikutbildning vid Göteborgs universitet och Umeå forskningscentrum för matematikdidaktik vid Umeå universitet.
- Brandell, L. (2013) *Matematikkompetenserna 2013 hos nybörjarna på civilingenjörsprogrammen och andra program vid KTH: Bearbetning av ett förkunskapstest*, Stockholm: Kungliga Tekniska Högskolan.
- Förordning (2008:793) om försöksverksamhet med riksrekryterande gymnasial spetsutbildning.
- Högskoleverket (2009) *Förkunskaper och krav i högre utbildning*, Rapport 2009:16, Stockholm: Högskoleverket.
- Prop. 2012/13:64, *Utökad undervisningstid i matematik*.
- Regeringskansliet (2014) *Mer matematik i högstadiet*, 2014-03-30.
- Skolinspektionen (2009) *Undervisningen i matematik – utbildningens innehåll och ändamålsenlighet*, Rapport 2009:5, Stockholm: Skolinspektionen.
- Skolinspektionen (2010) *Undervisningen i matematik i gymnasieskolan*, Rapport 2010:13, Stockholm: Skolinspektionen.
- Skollagen (2010:800).
- Skolverket (2003) *Lusten att lära – med fokus på matematik*, Nationella kvalitetsgranskningar 2001-2002, Skolverkets rapport 221, Stockholm: Fritzes.
- Skolverket (2009) *TIMSS Advanced 2008: Svenska gymnasieelevers kunskaper i avancerad matematik och fysik i ett internationellt perspektiv*, Rapport 336, Stockholm: Fritzes.
- Skolverket (2010) *Svenska elevers kunskaper i TIMSS Advanced 2008 och 1995: En djupanalys av hur eleverna i gymnasieskolan förstår centrala begrepp inom matematiken*, Analysrapport till 336, Stockholm: Fritzes.
- Skolverket (2011a) *Gymnasieskola 2011*, Stockholm: Fritzes.
- Skolverket (2011b) *Matematik, Ämnesplan*, <http://www.skolverket.se/laroplaner-amnen-och-kurser/gymnasieutbildning>
- Skolverket (2012) *TIMSS 2011: Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*, Rapport 380, Stockholm: Fritzes.

Skolverket (2013a) *PISA 2012: 15-åringars kunskaper i matematik, läsförståelse och naturvetenskap*, Rapport 398, Stockholm: Fritzes.

Skolverket (2013b) *Matematik: Det centrala innehållet i kurserna i Gy 2011 i relation till kurserna i Gy 2000*, <http://www.skolverket.se/laroplaner-amnen-och-kurser/gymnasieutbildning/gymnasieskola/mat?tos=gy&subjectCode=MAT&lang=sv>

Skolverket (2014) *PISA 2012: Digital problemlösningsförmåga hos 15-åringar i ett internationellt perspektiv*, Rapport 406, Stockholm: Fritzes.

SOU 2004:97, *Att lyfta matematik – intresse, lärande, kompetens*, Betänkande av Matematikdelegationen, Stockholm: Fritzes.

Utbildningsdepartementet (2011) *Uppdrag till Statens skolverk att svara för Lärarlyftet II*, Regeringsbeslut 2011-10-06.

Utbildningsdepartementet (2012) *Uppdrag att svara för utbildning*, Regeringsbeslut 2012-03-29.